

**Clasa a XII a**

1. Se consideră mulțimea  $G = \left\{ f_n : (2, \infty) \rightarrow (2, \infty) / f_n(x) = 2 + (x-2)^{2^n}, n \in \mathbb{Z} \right\}$ . Să se arate că, în raport cu operația de compunere a funcțiilor,  $G$  are o structură de grup abelian, izomorf cu  $(\mathbb{Z}, +)$ .

2. Fie  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  o funcție derivabilă care satisface egalitatea

$$(f'(x))^2 = (f(x))^2 + 4, \forall x \in \mathbb{R}.$$

a) Demonstrați că  $f$  este strict monotonă;

b) Determinați funcția  $f$  în cazul în care este strict crescătoare și  $f(0) = -\frac{3}{2}$ .

*RMT 1/2009*

3. Fie  $(G, \cdot)$  un grup și  $H$  o submulțime a lui  $G$ , nevidă și diferită de  $G$ , cu proprietatea :

$\forall x \in H, \forall y \in G \setminus H \Rightarrow xy \in G \setminus H$ . Să se arate că  $H$  este un subgrup al lui  $G$ .

*Gazeta Matematică*

4. Se consideră mulțimea  $D = \left[ 0, \frac{\pi}{2} \right]$  și funcția  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \sin x \cdot \cos 3x$ .

a. Arătați că există  $a, b \in D \setminus \left\{ 0, \frac{\pi}{2} \right\}$  pentru care  $f(a) \in \mathbb{Q}$  și  $f(b) \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ .

b. Demonstrați că dacă  $F$  este o primitivă a funcției  $f$  pentru care

$$F(0) \in \mathbb{Q}, \text{ atunci } F\left(\frac{\pi}{2}\right) \in \mathbb{Q}.$$

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii.

Timp de lucru: 3 ore

Fiecare problemă se punctează cu 7 puncte.